माध्यमिक स्तर पर औसत से जुड़ी समस्याएँ

ए. रामचन्द्रन

समस्याएँ

समस्या VIII–3–M.1

एक व्यापारी एक ही दाम पर दो सामान बेचता है। पहले सामान पर वह लागत मूल्य के ऊपर *'p'* प्रतिशत ($0 < p < 100$) मुनाफ़ा कमाता है। दूसरे सामान पर उसे *'p'* प्रतिशत घाटा होता है। कुल मिलाकर, उसे घाटा होता है या मुनाफ़ा? इस सकल घाटे/ मुनाफ़े के प्रतिशत को *'p'* के रूप में व्यक्त करें। आप इस स्थिति में लाभ/ हानि के बारे में भिन्न संख्या के रूप में भी विचार कर सकते हैं जिसमें, उदाहरण के लिए, $\frac{p}{100} = x$ हो।

समस्या VIII–3–M.2

एक व्यापारी प्रतिदिन एक ही रास्ते से शहर A से शहर B को जाता है और वापस आता है; जाते व आते समय उसकी चाल एक समान रहती है। एक दिन, शहर A से जाते समय उसे समझ आया कि उसे अपनी चाल *'p'* प्रतिशत कम करनी पड़ी थी। अलबत्ता, अपनी वापसी यात्रा में वह रोज़ाना की अपनी सामान्य चाल से *'p'* प्रतिशत अधिक तेज़ चला। तो, इस दिन आने-जाने में उसने सामान्य दिनों की तुलना में अधिक/ कम समय लिया? सफ़र में लगे समय में घटत/ बढ़त को *'p'* के रूप में व्यक्त करें। उपरोक्त की तरह, आप घटत/ बढ़त पर भिन्न संख्या के रूप में विचार कर सकते हैं जिसमें, उदाहरण के लिए, $\frac{p}{100} = x$ $(x < 1)$ हो।

समस्या VIII–3–M.3

एक दुकान दो तरह की चॉकलेट बेचती है, जिनके दाम क्रमशः ₹P और ₹Q हैं। मैं दोनों तरह की चॉकलेट ख़रीदने के लिए समान *राशि* ख़र्च करता हूँ। तो एक चॉकलेट की औसत कीमत क्या होगी?

समस्या VIII–3–M.4

समान *द्रव्यमान* के दो घन हैं, जिन्हें दो भिन्न घनत्व x और y वाली धातुओं से बनाया गया है। इन्हें आपस में संलयित कर दिया जाता है। इस तरह बनी वस्तु का घनत्व क्या होगा?

समस्या VIII–3–M.5

एक व्यक्ति A शहर से B शहर की यात्रा तीन हिस्सों में करता है। वह पहले तिहाई हिस्से का सफ़र *a* किमी/ घण्टा की एकरूप (या औसत) चाल से तय करता है। दूसरे तिहाई हिस्से का सफ़र *b* किमी/ घण्टा और बाक़ी सफ़र *c* किमी/ घण्टा की चाल से तय करता है। तो उसकी पूरी यात्रा की औसत चाल क्या रही?

समस्या VIII–3–M.6

एक वन क्षेत्र में किसी एक वर्ष में खरगोशों की तादाद 20% बढ़ी, उसके अगले वर्ष 5% घटी और उसके अगले वर्ष 10% बढ़ी। ऐसे में, इन तीन वर्षों में वृद्धि की औसत दर क्या होगी? दूसरे शब्दों में, वह प्रतिशत वृद्धि दर क्या होगी जो तीनों वर्षों में समान रूप से लागू होने पर वही अन्तिम परिणाम देगी?

समाधान

समस्या VIII–3–M.1

प्रतिशत की बजाय भिन्न के साथ काम करना ज़्यादा आसान होगा। माना कि दोनों ही सामानों का बिक्री मूल्य S है। तब पहले सामान का लागत मूल्य $\frac{S}{1+x}$ हुआ, जबकि दूसरे सामान का लागत मूल्य $\frac{S}{1-x}$ हुआ। तो कुल लागत मूल्य हुआ

$$\frac{2S}{1-x^2},$$

जो कुल बिक्री मूल्य 2*S* से अधिक है; यानी कुल मिलकर घाटा होगा। ऐसे में, भिन्न संख्या के रूप में घाटा, यानी घाटे की राशि को कुल लागत मूल्य से विभाजित करने पर x^2 प्राप्त होगा। प्रतिशत के रूप में यह $\left(\frac{p}{100}\right)^2$ प्रतिशत होगा।

समस्या VIII–3–M.2

हम फिर से भिन्न के साथ काम करेंगे। माना कि A व B शहरों के बीच की दूरी *d* है और सामान्यत: व्यापारी s चाल से वाहन चलाता है। ऐसे में, आमतौर पर जाने व आने में $\frac{2d}{s}$ समय लगता है। जिस दिन जाने व आने की यात्राओं में चाल अलग-अलग रही, उस दिन यात्रा का कुल समय होगा

$$\frac{d}{s(1-x)}+\frac{d}{s(1+x)}=\frac{2d}{s(1-x^2)},$$

जो कि आमतौर पर यात्रा में लगने वाले समय $\frac{2d}{s}$ से अधिक है। भिन्न के रूप में समय में यह वृद्धि $\frac{x^2}{1-x^2}$ होगी।

टीप : ऊपर दी गई दोनों ही स्थितियों में $1-x^2$ का मान महत्त्वपूर्ण भूमिका अदा करता है। यह मान सदैव 1 से कम होता है। यह तथ्य ऐसी ही अन्य परिस्थितियों में भी उभरकर सामने आता है। उदाहरण के लिए, यदि आप किसी वर्ग के परिमाप को एक निश्चित भिन्न/ प्रतिशत में एक दिशा में बढ़ाएँगे और उसी भिन्न/ प्रतिशत में उसके लम्बवत परिमाप को घटाएँगे तो क्षेत्रफल हमेशा घटेगा।

समस्या VIII–**3**–M.**3**

माना कि दोनों ही तरह की चॉकलेट पर ख़र्च की गई राशि S-S है। ऐसे में, प्रकार-1 की चॉकलेट की संख्या $\frac{S}{P}$ होगी जबकि प्रकार-2 की चॉकलेट की संख्या $\frac{S}{Q}$ होगी। अत: एक चॉकलेट की क़ीमत होगी

$$\frac{\text{कुल ख़र्च राशि}}{\text{चॉकलेट की कुल संख्या}} = \frac{2S}{\frac{S}{P}+\frac{S}{Q}} = \frac{2PQ}{P+Q}.$$

समस्या VIII–**3**–M.**4**

यह समस्या ऊपर दी गई समस्या जैसी ही है। माना कि प्रत्येक घन का द्रव्यमान M है। तब घनों का आयतन क्रमश: $\frac{M}{x}$ व $\frac{M}{y}$ होगा। तो, औसत घनत्व होगा

$$\frac{\text{कुल द्रव्यमान}}{\text{कुल आयतन}} = \frac{2M}{\frac{M}{x}+\frac{M}{y}} = \frac{2xy}{x+y}.$$

टीप : ऊपर दी गई दोनों समस्याओं में हम जो पाते हैं उसे *हरात्मक माध्य (harmonic mean)* कहते हैं। यदि समस्या-3 में दोनों प्रकार की *चॉकलेट की संख्या* सामान होती अथवा समस्या-4 में दोनों घनों के आयतन समान होते, तो हमने समान्तर माध्य (arithmetic mean) ही ले लिया होता।

समस्या VIII–**3**–M.**5**

यात्रा की औसत चाल = $\frac{\text{कुल दूरी}}{\text{कुल समय}}$। यदि शहर A से शहर B के बीच की दूरी 3*s* मानें तो यह बराबर होगा

$$\frac{3s}{\frac{s}{a}+\frac{s}{b}+\frac{s}{c}}=\frac{3abc}{ab+bc+ca}$$

यह *a, b, c* का हरात्मक माध्य है। ध्यान दें कि यदि *a=b=c* तो यह व्यंजक सरल रूप में *a* हो जाता है।

अब ऐसी ही एक समस्या का समाधान करें जहाँ यात्रा को चार हिस्सों में बाँटा गया हो। क्या आपको जवाब में एक पैटर्न नज़र आता है?

समस्या VIII–**3–**M.**6**

यदि P_O व P_F क्रमश: आरम्भिक और अन्तिम जनसंख्या हैं, तो हमें मिलेगा

$$P_F=P_O\left(1+\frac{20}{100}\right)\left(1-\frac{5}{100}\right)\left(1+\frac{10}{100}\right)$$

तब यदि *a* आवश्यक औसत प्रतिशत वृद्धि है, तो हमें मिलेगा

$$P_F=P_O\left(1+\frac{a}{100}\right)^3$$

यह हुआ $\left(1+\frac{a}{100}\right)^3=1.2\times0.95\times1.1$, अथवा
$1+\frac{a}{100}=\sqrt[3]{1.2\times0.95\times1.1}$.

अत: $1+\frac{a}{100}$ = 1.078 (लगभग) (1.2, 0.95 व 1.1 का गुणोत्तर माध्य [geometric mean] 1.078 है), इस प्रकार *a* = 7.8% होगा।

अनुवाद : अतुल वाधवानी **पुनरीक्षण** : सुशील जोशी
कॉपी एडिटर : अनुज उपाध्याय (एकलव्य फ़ाउण्डेशन) **सम्पादन** : राजेश उत्साही